Tentamen Lineaire Algebra

1 juli 2009 9.00-12.00 uur

Tijdens dit tentamen mogen boek/diktaat/aantekeningen en de grafische rekenmachine worden geraadpleegd. **Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd.** Een antwoord zonder berekening zal dus niet worden goed gerekend. Succes !

Vermeld op elke bladzijde je naam en studentnummer.

Gratis: $\boxed{10}$

1. Gegeven is het stelsel van vergelijkingen

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 1 \\ -y + \alpha z &= -2 \\ 2x + 2y &= \beta \end{aligned}$$

Hierin zijn α en β nader te bepalen constantes.

(a) $\boxed{5}$ Neem $\alpha = -1$ en $\beta = 2$ en bepaal de oplossing van het stelsel

(b) $\boxed{5}$ Bepaal voor welke α en β het stelsel precies één oplossing heeft.

(c) $\boxed{5}$ Bepaal voor welke α en β het stelsel oneindig veel oplossingen heeft.

2. Gegeven zijn de vectoren

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hierin is α een nader te bepalen constante.

(a) $\boxed{5}$ Voor welke α zijn $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ en $\vec{\mathbf{c}}$ lineair afhankelijk?

(b) $\boxed{6}$ Bepaal voor welke α de hoek tussen $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{c}}$ gelijk is aan $\pi/3$ (dus 60^o).

3. Gegeven is de matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \alpha \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Hierin is α een nader te bepalen constante.

(a) $\boxed{5}$ Bereken de inverse van $\mathbf{A}$ voor het geval $\alpha = 0$. Maak hierbij gebruik van de structuur van de matrix wanneer $\alpha = 0$.

(b) $\boxed{6}$ Bereken de inverse van $\mathbf{A}$ voor algemene waarden van α.
Opmerking: je kunt je antwoord controleren voor het geval $\alpha = 0$ m.b.v. (3a).

Z.O.Z.

4. Gegeven zijn de matrix $\mathbf{M}$ en de toestandsvector $\vec{\mathbf{r}}_0$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\mathbf{r}}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De matrix $\mathbf{M}$ beschrijft toestandsovergangen volgens $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{r}_k$.

(a) $\boxed{5}$ Bereken de eigenwaarden van $\mathbf{M}$.
Aanwijzing: $\lambda = 1$ is één van de eigenwaarden. Maak eventueel gebruik van de structuur van de matrix.

(b) $\boxed{6}$ Bereken de eigenvectoren van $\mathbf{M}$.

(c) $\boxed{7}$ Bepaal de toestanden $\mathbf{r}_k$ (voor willekeurige k), wanneer wordt begonnen met begintoestand $\vec{\mathbf{r}}_0$.

(d) $\boxed{5}$ Beschrijf de toestand na zeer veel overgangen, dus $k \to \infty$. Is er sprake van een stationaire (dus constante) eindtoestand?

5. Gegeven is het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} {y_1}' &= 3\,y_1 + 2\frac{1}{2}\,y_2 \\ {y_2}' &= -2\,y_1 + y_2 \end{aligned}$$

met randvoorwaarden $y_1(0) = 2$ en $y_2(0) = -1$.

(a) $\boxed{6}$ Bereken de eigenwaarden bij dit stelsel.

(b) $\boxed{6}$ Bereken de eigenvectoren bij dit stelsel.

(c) $\boxed{8}$ Bepaal de reële oplossing van het stelsel met bijbehorende randvoorwaarden.
In geval van complexe eigenwaarden en eigenvectoren mag je de complexe oplossing direct (dus zonder berekening) omzetten in de reële oplossing.

6. In de 3-dimensionale ruimte zijn gegeven het vlak $V : 2x - y + 3z = 27$ en het punt $P(1, 0, -1)$.

(a) $\boxed{6}$ Bereken de (loodrechte) projectie van het punt P op het vlak V.

(b) $\boxed{4}$ Bereken de afstand van P tot het vlak V.

Totaal: $\boxed{100}$